MATHS 2
FILIERES M, P (Durée 4 heures)

EXERCICE :

1°) Construire la courbe (C) d'équation polaire $\rho = \dfrac{a}{\cos^3 \dfrac{\theta}{3}}$ a étant un réel strictement positif fixé.

(Pour tracer la courbe, on fixera "a" à un centimètre environ, le papier millimétré n'étant pas exigé).

2°) Calculer la longueur L et l'aire A de la boucle de (C).

PROBLEME :

Le but de ce problème est d'établir une formule intégrale d'un système différentiel. L'énoncé nécessitant souvent d'importantes précisions, la longueur apparente de la question posée n'est pas liée à sa difficulté. Les différentes parties de ce problème sont, dans une large mesure, indépendantes entre elles. Certains renvois, d'une partie à l'autre, concernent des résultats proposés ou des définitions.

PARTIE A

1°) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2°) On considère la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ et les trois vecteurs

$$\vec{V}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{V}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{V}_3 = \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2$$

a) Montrer que $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$; soit B cette base.

b) Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique C. Déterminer la matrice de f dans la base B.

3°) Considérons le système différentiel linéaire $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8x - y - 5z \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y + z \\ \frac{dz}{dt} = 4x - y - z \end{cases}$ que nous noterons $X' = AX$.

X désignant la matrice $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de fonctions inconnues de la variable réelle t, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) En effectuant le changement $X = PU$, P désignant la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$, U désignant la matrice des nouvelles fonctions inconnues $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, donner l'expression d'un système équivalent au précédent. Résoudre ce système.

b) En déduire la solution générale du système $X' = AX$.

PARTIE B

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \alpha_{ij}(x)$ $(1 \le j \le n;\ 1 \le i \le n)n^2$ **fonctions continues de I dans** $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \varphi_i(x)$ $(1 \le i \le n)$ **n fonctions continues de I dans** $\mathbb{R}$

le système

$$\begin{cases} y'_1 = \alpha_{11}(x)y_1 + \alpha_{12}(x)y_2 + \ldots + \alpha_{1n}(x)y_n + \varphi_1(x) \\ y'_2 = \alpha_{21}(x)y_1 + \alpha_{22}(x)y_2 + \ldots + \alpha_{2n}(x)y_n + \varphi_2(x) \\ \text{----------} \\ y'_n = \alpha_{n1}(x)y_1 + \alpha_{n2}(x)y_2 + \ldots + \alpha_{nn}(x)y_n + \varphi_n(x) \end{cases}$$

se nomme système différentiel linéaire du premier ordre aux fonctions inconnues $y_1, \ldots, y_n$ de la variable x.

1°) En notant Y la matrice $\begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_n \end{pmatrix}$ Y' la matrice $\begin{pmatrix} y'_1 \\ \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}$

A la matrice $(\alpha_{ij}(x))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ B la matrice $\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$

écrire matriciellement ce système.

2°) E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, $C^1(I,E)$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 de I dans E, $C^0(I,E)$ l'ensemble des fonctions de classe C^0 de I dans E ; soit B une base de E.

On notera $\bar{y}$ l'élément de $C^1(I,E)$ dont la matrice $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_n \end{pmatrix}$ représente les différentes composantes, à x fixé, dans B. $\bar{y}'$, l'élément de $C^0(I,E)$ dont la matrice $Y'=\begin{pmatrix} y'_1 \\ \\ y'_n \end{pmatrix}$ représente les différentes composantes, à x fixé, dans B. Considérons enfin l'application

$$\Phi : C^1(I,E) \to C^0(I,E)$$
$$\bar{y} \mapsto \bar{y}' - a(x)\bar{y}$$

a(x) étant l'endomorphisme de E dont la matrice est A, à x fixé, dans B.

a) Montrer que Φ est linéaire.

b) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation homogène Y' = AY est un sous espace de $C^1(I,E)$.

c) Si S désigne l'ensemble des solutions de l'équation Y' = AY, montrer que S est isomorphe à E. En déduire la dimension de l'espace vectoriel S.

3°) Soient E_1, E_2, ...E_n et F n+1 espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{R}$.

$$f : E_1 x ... x E_n \to F$$

une application n- linéaire.

Supposons, pour $i \in \{1,...n\}$ que $\bar{x}_i(t)$ désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans E_i dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Montrer que, pour tout t de I, $f[\bar{x}_1(t),...\bar{x}_i(t),...\bar{x}_n(t)]$ est dérivable et que, pour tout t de I

$$\frac{df}{dt}[\bar{x}_1(t),...\bar{x}_i(t),...\bar{x}_n(t)] = \sum_{i=1}^{n} f\left[\bar{x}_1(t),...\bar{x}_{i-1}(t),\frac{d\bar{x}_i(t)}{dt},\bar{x}_{i+1}(t),...,\bar{x}_n(t)\right]$$

(On pourra utiliser le fait que $f\left(\bar{x}_1(t),...\bar{x}_{i-1}(t)\right),\frac{\bar{x}_i(t+h)-\bar{x}_i(t)}{h},\bar{x}_{i+1}(t+h)...\bar{x}_n(t+h)$ admet pour limite $f\left[\bar{x}_1(t),...\bar{x}_{i-1}(t),\frac{d\bar{x}_i(t)}{dt},\bar{x}_{i+1}(t),...\bar{x}_n(t)\right]$ quand h tend vers zéro.)

4°) Si A = $\left(x_{ij}(t)\right)\ 1 \le i \le p$ désigne une matrice de fonctions de $C^1(I, \mathbb{R})$, on appelle
$1 \le j \le n$
matrice dérivée de A, notée A', la matrice

$$A' = \left(\alpha_{ij} = \frac{dx_{ij}(t)}{dt}\right)\ \begin{matrix} 1 \le i \le p \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$$

a) Si λ désigne un réel, A et B deux matrices dérivables pour tout réel t de l'intervalle I, montrer que

. $(\lambda A)' = \lambda A'$
. $(A+B)' = A' + B'$

b) $M_{k,r}(\mathbb{R})$ désignant généralement l'ensemble des matrices à k lignes et r colonnes à coefficients réels, en désignant par

$$E_1 = M_{p,n}(\mathbb{R}) \quad E_2 = M_{n,1}(\mathbb{R}) \quad F = M_{p,1}(\mathbb{R})$$

Ces trois espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $\varphi : E_1 \times E_2 \to F$
$(A,B) \mapsto A\,B$ [produit des deux matrices]
est bilinéaire. En déduire la dérivée de AB.

5°) On considère le système linéaire homogène Y' = AY de n équations à n fonctions inconnues ; on désigne toujours par S l'espace vectoriel des solutions. Soit $\{\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n\}$ une base de S, $Y_1, \ldots Y_n$ les matrices de ces solutions, conformément aux notations du B)2°.

On notera M la matrice M = $\{\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n\}$ dont les n colonnes sont les matrices $Y_1, \ldots Y_n$ respectivement.

$$M(s) = \left(y_{ij}(s)\right)\ \begin{matrix} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$$

les $x_{ij}(s)$ étant des fonctions de $C^1(I, \mathbb{R})$

On définit $\int_{t_o}^{t} M(s)ds = \left(\beta_{ij} = \int_{t_o}^{t} y_{ij}(s)ds\right)\ 1 \le i \le n$
$1 \le j \le n$

a) Yo étant un vecteur fixé de $E = \mathbb{R}^n$, montrer que la solution du système Y' = AY +B prenant la valeur Yo pour t = t_0 fixé dans I s'écrit :

$$Y(t) = M(t)M^{-1}(t_o)Yo + \int_{t_o}^{t} M(t)M^{-1}(s)B(s)ds$$

[On envisagera le changement d'inconnues Y = MZ]

b) En notant $R(t,t_O) = M(t)\,M^{-1}(t_O)$, réécrire $Y(t)$ en fonction de $R(t,t_O)$ et $R(t,s)$.

c) Montrer que $R(t,t_O)$ est inversible et préciser son inverse.

d) Que vaut $R[t_O,t_O]$?

e) Simplifier le produit $R(t,t_O)$ x $R(t_O,t')$.

PARTIE C

Soit un système différentiel linéaire, homogène, $Y' = AY$, A étant une matrice à coefficients constants de $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

$M = [Y_1,...Y_n]$ désignant toujours la matrice définie au B) 5°.

$R(t,t_O) = M(t)\,M^{-1}(t_O)$ sera appelée la résolvante du système.

On appelle matrice exponentielle de la matrice t A (t réel fixé)

$\exp(tA) = R(t,o)$

1°) Montrer que $\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA)$
et que $\exp(oA) = I_n$ I_n désignant l'élément unité de $M_{n,n}(\mathbb{R})$

2°) En déduire que $\exp(tA)$ est une matrice inversible.

3°) Soit $V(t) = \exp\{(t+t_o)A\}[\exp(t_oA)]^{-1}$

Montrer que V(t) = exp (tA)

{ On admettra, par analogie avec les sytèmes que si M est une matrice à coefficients fonctionnels, il existe une seule solution au système $\frac{d}{dt}M(t) = B(t)$ vérifiant la condition $M(o) = I_n$}

4°) En déduire que $\exp(tA)\ \exp(t_OA) = \exp\{(t+t_o)A\}$

5°) En déduire la résolvante du système $Y' = AY$ où A désigne une matrice de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ à coefficients constants.

6°) Montrer que $\exp(tA) = \sum_{n=o}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}A^n$

(On admettra que cette dernière série peut être dérivée terme à terme).

7°) Caractériser si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, exp (tD)

8°) Si $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$ déterminer la résolvante du système.

PARTIE D

1°) Soit $E = \mathbb{R}^n$, f un endomorphisme de l'espace vectoriel E. B une base de E et $\{\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_i, \ldots \vec{u}_n\}$ une famille de n vecteurs de E.

det_B désignant le déterminant dans la base B de E.

a) Montrer que

$$\varphi : E \to \mathbb{R}$$
$$(\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \det_B(\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_{i-1}, f(\vec{u}_i), \vec{u}_{i+1}, \ldots \vec{u}_n)$$

est multilinéaire alternée.

b) En déduire que $\sum_{i=1}^{n} \det_B[\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_{i-1}, f(\vec{u}_i), \vec{u}_{i+1}, \ldots \vec{u}_n] = tr(f) \det_B[\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n]$

tr (f) désignant la trace de f.

2°) Considérons le système $Y' = A(t)Y$ de n équations à n fonctions inconnues ; soit $M = [Y_1, \ldots Y_n]$ une matrice des solutions du système [cf B)5°]

Soit $W(t) = \det[Y_1(t), \ldots Y_n(t)] = \det M$

Calculer $W'(t) = \dfrac{dW(t)}{dt}$

3°) En déduire $W(t)$.